1. *la fonction* : $x \to \sin x$

est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-1,1\right[$

F est dérivable sur $]-1,1[$ *d'où g est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=Cos\,x.F'(\sin x)$

$=Cos\,x.f(\sin x)$

$=\frac{Cos\,x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{Cos\,x}{\sqrt{Cos^2 x}}$

$=\frac{Cos\,x}{|Cos\,x|}=1$ *car* $\frac{Cos\,x\succ 0}{x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$

$g'(x)=1\,;\forall x\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2. $g'(x)=1$

d'où $g(x)=x+k$, $k\in\mathbb{R}$

$g(0)=F(0)=0$

$\Rightarrow 0+k=0$

$\Rightarrow k=0$

d'ou $g(x)=x\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $F(\frac{\sqrt{2}}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{4})\right)=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right)=g(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$

$F(-\frac{\sqrt{3}}{2})=F\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right)=g(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ ;x\in[0,1]$

F dérivable sur $[0,1]$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g=F(Cos\,x)\,;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. *g est dérivable sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

comme était composée de deux fonction dérivable. (*voir ex* 9)

$g'(x)=(-\sin x).F'(Cos\,x)$

$=(-\sin x).f(Cos\,x)$

$=-\sin x\sqrt{1-Cos^2 x}$

$=-\sin x|\sin x|$

$=-\sin^2 x$ *car* $\sin x\geq 0$

2. $g'(x)=-\sin^2 x=-\frac{1}{2}(1-Cos\,2x)$

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$g(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\frac{\pi}{4}$

d'où

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

3. $F(1)=F(Cos0)=g(0)=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}})=F(Cos\frac{\pi}{4})=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

EX 11 :

1. $f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=a\,;a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=a\,x+b\qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

2. $f''(x)=\sin x$

$\Rightarrow f'(x)=-Cos\,x+a;\ \ a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=-\sin x+a\,x+b$

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$